5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

$\log_\alpha \theta$ λέγεται ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον **α** για να βρούμε τον **θ**, δηλαδή : $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow \log_\alpha \theta = x$

Περιορισμοί : $\alpha > 0$ και $\neq 1$, $\theta > 0$

2.

Ιδιότητες από τον ορισμό

$\log_\alpha \alpha^x = x$ $\qquad$ $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

$\log_\alpha 1 = 0$ $\qquad$ $\log_\alpha \alpha = 1$

3.

Ιδιότητες

$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

$\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$

$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$, $\kappa \in \mathbb{R}$

$\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \dfrac{1}{\nu}\log_\alpha \theta$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$

4.

Δεκαδικοί και Φυσικοί λογάριθμοι

Δεκαδικοί λογάριθμοι = λογάριθμοι με βάση το 10

Φυσικοί λογάριθμοι = λογάριθμοι με βάση το e

Συμφωνία : $\log_{10} \theta = \log \theta$ και $\log_e \theta = \ln\theta$

5.

Ιδιότητες

$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$ $\qquad$ και $\qquad$ $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$

6.

Τύπος αλλαγής βάσης

$\log_\alpha \theta = \dfrac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}$, όπου $\theta > 0$ και $0 < \alpha, \beta \neq 1$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Μάθετε πολύ καλά

i) τον ορισμό
ii) τους περιορισμούς
iii) τις ιδιότητες

Γρήγορα θα διαπιστώσετε ότι οι ασκήσεις είναι εύκολες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δείξτε ότι $$\frac{\log_3 81 - \log_8 64}{\log_{\frac{1}{2}} 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 4\sqrt{2}} = -\frac{4}{17}$$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4$

$\log_8 64 = \log_8 8^2 = 2\log_8 8 = 2$

Έστω ότι $\log_{\frac{1}{2}} 64 = x \Leftrightarrow 64 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2^6 = 2^{-x} \Leftrightarrow x = -6$

$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5\log_2 2 = -5$$

$$\log_2 (4\sqrt{2}) = \log_2 (2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}\log_2 2 = \frac{5}{2}$$

Άρα $$\frac{\log_3 81 - \log_8 64}{\log_{\frac{1}{2}} 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 4\sqrt{2}} = \frac{4-2}{-6-5+\frac{5}{2}} = -\frac{4}{17}$$

2.

Αν $x = \log_{\sqrt{\alpha}} \alpha$, $y = \log_\alpha \alpha^2$, $z = \log_{\alpha^2} \alpha^4$, $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$,
δείξτε ότι $x\,y\,z = x + y + z + 2$

Προτεινόμενη λύση

$x = \log_{\sqrt{\alpha}} \alpha \Leftrightarrow \alpha = (\sqrt{\alpha})^x \Leftrightarrow \alpha = \alpha^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x = 2$

$y = \log_\alpha \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha^y \Leftrightarrow y = 2$

$z = \log_{\alpha^2} \alpha^4 \Leftrightarrow \alpha^4 = (\alpha^2)^z \Leftrightarrow \alpha^4 = \alpha^{2z} \Leftrightarrow z = 2$

Άρα $x\,y\,z = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$ και $x + y + z + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

Οπότε $x\,y\,z = x + \psi + z + 2$

3.

Να αποδείξετε ότι $\log_3\left(3x\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}\right)=1+\frac{5}{6}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3 2$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
\log_3\left(3x\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}\right) &= \log_3(3x)+\log_3\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}} \\
&= \log_3 3+\log_3 x+\log_3\sqrt[3]{x}-\log_3\sqrt{2x} \\
&= 1+\log_3 x+\log_3 x^{\frac{1}{3}}-\log_3(2x)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1+\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(2x) = \\
&= 1+\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x-\frac{1}{2}[\log_3 2+\log_3 x] \\
&= 1+\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 x \\
&= 1+(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3 2 \quad = \quad 1+\frac{5}{6}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3 2
\end{aligned}$$

4.

Να αποδείξετε ότι $\log_2\sqrt{32\sqrt{16\sqrt[5]{2}}} = \frac{71}{20}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
\log_2\sqrt{32\sqrt{16\sqrt[5]{2}}} &= \log_2\left(32\sqrt{16\sqrt[5]{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}[\log_2(32\sqrt{16\sqrt[5]{2}}) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\log_2 32+\log_2(\sqrt{16\sqrt[5]{2}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\log_2 32+\frac{1}{2}\log_2(16\sqrt[5]{2})^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log_2 32+\frac{1}{4}\log_2(16\sqrt[5]{2}) \\
&= \frac{1}{2}\log_2 32+\frac{1}{4}[\log_2 16+\log_2\sqrt[5]{2}] \\
&= \frac{1}{2}\log_2 32+\frac{1}{4}\log_2 16+\frac{1}{4}\log_2 2^{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{1}{2}\log_2 32+\frac{1}{4}\log_2 16+\frac{1}{20}\log_2 2 \\
&= \frac{1}{2}\log_2 2^5+\frac{1}{4}\log_2 2^4+\frac{1}{20} \\
&= \frac{5}{2}\log_2 2+\frac{4}{4}\log_2 2+\frac{1}{20} \quad = \quad \frac{5}{2}+1+\frac{1}{20}=\frac{71}{20}
\end{aligned}$$

5.

Αν $\log 2 = 0{,}301$ και $\log 14 = 1{,}146$, να βρείτε τους λογάριθμους

$\log 28$, $\log 5$, $\log 56$, $\log\frac{4}{7}$, $\log 35$.

Προτεινόμενη λύση

- $\log 28 = \log(2\cdot 14) = \log 2 + \log 14 = 0{,}301 + 1{,}146 = 1{,}447$
- $\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$
- $\log 56 = \log(7\cdot 8) = \log 7 + \log 8$

  $= \log\frac{14}{2} + \log 8 =$

  $= \log 14 - \log 2 + \log 8$

  $= 1{,}146 - 0{,}301 + 0{,}903 = 1{,}748$
- $\log\frac{4}{7} = \log 4 - \log 7 = \log 2^2 - \log\frac{14}{2}$

  $= 2\log 2 - \log 14 + \log 2$

  $= 3\log 2 - \log 14 = -0{,}243$
- $\log 35 = \log(5\cdot 7) = \log 5 + \log 7 =$

  $= \log\frac{10}{2} + \log\frac{14}{2}$

  $= \log 10 - \log 2 + \log 14 - \log 2 = 1{,}544$

6.

Για κάθε $x , y > 0$ και $\neq 1$ δείξτε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\log(x^{\log y}) = \log(y^{\log x})$

$\log y \log x = \log x \log y$ που είναι προφανής .

7.

Να βρείτε τον $x > 1$ έτσι ώστε να ισχύει $2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$

Προτεινόμενη λύση

$2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9 \iff 2(\log_x 8)^2 + \log_x 8^2 + \log_x 8 = 9$

$2(\log_x 8)^2 + 2\log_x 8 + \log_x 8 = 9$

$2(\log_x 8)^2 + 3\log_x 8 - 9 = 0 \quad$ **(1)**

Θέτουμε $\log_x 8 = y$, οπότε η (1) $\iff 2y^2 + 3y - 9 = 0$

$y = -3$ ή $y = \frac{3}{2}$

$\log_x 8 = -3$ ή $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

$8 = x^{-3}$ ή $8 = x^{\frac{3}{2}}$

$x^3 = \frac{1}{8}$ ή $8 = \sqrt{x^3}$

$x = \frac{1}{2}$ (απορρίπτεται) ή $64 = x^3$

$x = 4$

8.

Να βρείτε τον x έτσι ώστε να ισχύει $\log_x \sqrt[3]{625} - \log_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0$

Προτεινόμενη λύση

$\log_x \sqrt[3]{625} - \log_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0 \iff \log_x 625^{\frac{1}{3}} - \log_x 125^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} = 0$

$\frac{1}{3}\log_x 5^4 - \frac{1}{2}\log_x 5^3 + \frac{1}{6} = 0$

$\frac{4}{3}\log_x 5 - \frac{3}{2}\log_x 5 + \frac{1}{6} = 0$

$\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)\log_x 5 + \frac{1}{6} = 0$

$-\frac{1}{6}\log_x 5 + \frac{1}{6} = 0$

$\log_x 5 = 1 \iff x = 5$

9.

Αν μία αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $α_1 = \log α$ και δεύτερο $α_2 = \log β$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_ν$ των ν πρώτων όρων της είναι $S_ν = \frac{1}{2}\log\frac{β^{ν(ν-1)}}{α^{ν(ν-3)}}$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $S_ν = \frac{[2α_1 + (ν-1)ω]ν}{2}$ **(1)**

Όμως $ω = α_2 - α_1 = \log β - \log α = \log\frac{β}{α}$

$$(1) \Rightarrow S_ν = \frac{1}{2}ν\left[2\log α + (ν-1)\log\frac{β}{α}\right] = \frac{1}{2}ν\left[\log α^2 + \log\left(\frac{β}{α}\right)^{ν-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}ν\log\left[α^2\left(\frac{β}{α}\right)^{ν-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}ν\log\left[α^2\frac{β^{ν-1}}{α^{ν-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[α^2\frac{β^{ν-1}}{α^{ν-1}}\right]^ν$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[\frac{β^{ν-1}}{α^{ν-3}}\right]^ν = \frac{1}{2}\log\frac{β^{ν(ν-1)}}{α^{ν(ν-3)}}$$

10.

Να λυθεί η εξίσωση $\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} = 2$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $x+1>0$ και $5x>0 \Leftrightarrow x>-1$ και $x>0 \Leftrightarrow x>0$

$$\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} = 2 \Leftrightarrow \log(x+1) + \log(\sqrt{5x})^2 = 2$$

$$\log(x+1) + \log 5x = 2$$

$$\log[(x+1)5x] = 2$$

$$\log(5x^2 + 5x) = 2$$

$$5x^2 + 5x = 10^2$$

$$x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ ή } x = 4.$$

Η $x = -5$ απορρίπτεται γιατί δεν ικανοποιεί τον περιορισμό

11.

Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{\log x}{\log x+2}+\dfrac{\log x+3}{\log x-1}=\dfrac{11}{2}$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $x>0$ και $\log x+2\neq 0$ και $\log x-1\neq 0$

Θέτοντας $\log x = y$ η εξίσωση γίνεται $\dfrac{y}{y+2}+\dfrac{y+3}{y-1}=\dfrac{11}{2}$

$$7y^2+3y-34=0$$

$$y=2 \quad ή \quad y=-\frac{17}{7}$$

$$\log x = 2 \quad ή \quad \log x = -\frac{17}{7}$$

$$x=10^2 \quad ή \quad x=10^{-\frac{17}{7}}$$

12.

Να λυθεί η εξίσωση $\log[\log(2x^2+x-11)]=0$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμοί : $2x^2+x-11>0$ και $\log(2x^2+x-11)>0$.

$$\log[\log(2x^2+x-11)]=0 \quad \Leftrightarrow \quad \log[\log(2x^2+x-11)]=\log 1$$

$$\log(2x^2+x-11)=1$$

$$\log(2x^2+x-11)=\log 10$$

$$2x^2+x-11=10$$

$$2x^2+x-21=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3 \quad ή \quad x=-\frac{7}{2}$$

απορρίπτεται

13.

Να λυθεί η εξίσωση $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $x>0$

$2^{\log x}+2^{5-\log x}=12 \Leftrightarrow 2^{\log x}+\dfrac{2^5}{2^{\log x}}=12$

Θέτουμε $2^{\log x}=y$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y+\dfrac{32}{y}=12$

$y^2-12y+32=0$

$y=8$ ή $y=4$

$2^{\log x}=8$ ή $2^{\log x}=4$

$2^{\log x}=2^3$ ή $2^{\log x}=2^2$

$\log x=3$ ή $\log x=2$

$x=10^3$ ή $x=10^2$

14.

Να λυθεί η εξίσωση $(4x)^{\log 2+\log\sqrt{x}} = 100$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $x > 0$

$(4x)^{\log 2+\log\sqrt{x}} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \log(4x)^{\log 2+\log\sqrt{x}} = \log 100$

$(\log 2 + \log\sqrt{x})[\log(4x)] = \log 100$

$$(\log 2 + \frac{1}{2}\log x)(\log 4 + \log x) = \log 100$$

$$(\log 2 + \frac{1}{2}\log x)(2\log 2 + \log x) = \log 100$$

$$(2\log 2+\log x)(2\log 2+\log x) = 2\log 100$$

$$(2\log + \log x)^2 = 2\log 10^2$$

$$(2\log 2 + \log x)^2 = 4$$

$$2\log 2 + \log x = \pm 2$$

$$\log 2^2 + \log x = \pm 2$$

$$\log(4x) = 2 \quad \text{ή} \quad \log(4x) = -2$$

$$4x = 10^2 \quad \text{ή} \quad 4x = 10^{-2}$$

$$x = 25 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{400}$$

15.

Να λυθεί η εξίσωση $\log(2^x + 2\cdot3^x) + \log81 = x\log3 + \log178$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να είναι $2^x + 2\cdot3^x > 0$, που ισχύει .

$$\log(2^x + 2\cdot3^x) + \log81 = x\log3 + \log178 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log(2^x + 2\cdot3^x) + \log81 = \log3^x + \log178$$

$$\log[81(2^x + 2\cdot3^x)] = \log(178\cdot3^x)$$

$$81\cdot2^x + 162\cdot3^x = 178\cdot3^x$$

$$81\cdot2^x = 16\cdot3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

16.

Να λυθεί η εξίσωση $10\cdot x^{\log x} = x^2\sqrt{x}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να είναι $x > 0$

$\log[10\cdot x^{\log x}] = \log(x^2\sqrt{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \log10 + \log x^{\log x} = \log x^2 + \log\sqrt{x}$

$$1 + \log x\cdot\log x = 2\log x + \frac{1}{2}\log x$$

$$1 + (\log x)^2 = \frac{5}{2}\log x$$

$$2(\log x)^2 - 5\log x + 2 = 0$$

Θέτουμε $\log x = y$ $\qquad 2y^2 - 5y + 2 = 0$

$$y = 2 \quad ή \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\log x = 2 \quad ή \quad \log x = \frac{1}{2}$$

$$x = 10^2 \quad ή \quad x = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 100 \quad ή \quad x = \sqrt{10}$$

17.

Να λυθεί η εξίσωση $\log_2(3^{2x-2}+7) = 2+\log_2(3^{x-1}+1)$

Προτεινόμενη λύση

$\log_2(3^{2x-2}+7) = 2+\log_2(3^{x-1}+1) \iff \log_2(3^{2x-2}+7) = 2+\log_2(3^{x-1}+1)$

$\log_2(3^{2x-2}+7) = \log_2 2^2+\log_2(3^{x-1}+1)$

$\log_2(3^{2x-2}+7) = \log_2[4(3^{x-1}+1)]$

$3^{2x-2}+7 = 4\cdot 3^{x-1}+4$

$3^{2(x-1)} - 4\cdot 3^{x-1}+3 = 0$

Θέτουμε $3^{x-1} = y$ $\quad y^2 - 4y + 3 = 0$

$y = 3$ ή $y = 1$

$3^{x-1} = 3^1$ ή $3^{x-1} = 3^0$

$x - 1 = 1$ ή $x - 1 = 0$

$x = 2$ ή $x = 1$

18.

Να λυθεί η εξίσωση $x + \log(1+2^x) = x\log5 + \log6$

Προτεινόμενη λύση

$x + \log(1+2^x) = x\log5 + \log6 \iff \log10^x + \log(1+2^x) = \log5^x + \log6$

$\log[10^x(1+2^x)] = \log(6\cdot5^x)$

$10^x(1+2^x) = 6\cdot5^x$

$2^x\cdot5^x(1+2^x) = 6\cdot5^x$

$2^x(1+2^x) = 6$

Θέτουμε $2^x = y$ $\quad y^2 + y - 6 = 0$

$y = -3$ ή $y = 2$ οπότε

$2^x = -3$ (αδύνατη) ή $2^x = 2 \iff x = 1$

19.

Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $\log 2$, $\log(2^x-1)$, $\log(2^x+3)$ με την σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου .

Προτεινόμενη λύση

Για να ορίζονται οι αριθμοί πρέπει να ισχύει

$2^x-1>0$ και $2^x+3>0$

Για να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου πρέπει

$2\log(2^x-1) = \log 2 + \log(2^x+3) \Leftrightarrow \log(2^x-1)^2 = \log[2(2^x+3)]$

$(2^x-1)^2 = 2\cdot 2^x + 6$

$2^{2x} - 2\cdot 2^x + 1 - 2\cdot 2^x - 6 = 0$

$2^{2x} - 4\cdot 2^x - 5 = 0$

Θέτουμε $2^x = y$ $\quad y^2-4y-5=0$

$y=5$ ή $y=-1$

$2^x=5$ ή $2^x=-1$ αδύνατη

$x\log 2 = \log 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 5}{\log 2}$

20.

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \log x^2 + \log y^2 = 2 \end{cases}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να ισχύουν $x>0$ και $y>0$

$$\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \log x^2 + \log y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log \dfrac{x}{y} = \log 10 \\ \log(x^2y^2) = \log 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ x^2y^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10y \\ 100y^4 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases}$$

21.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει $x^{\log y} = y^{\log x}$

ii) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$x^{\log y} = y^{\log x} \quad \Leftrightarrow \quad \log x^{\log y} = \log y^{\log x}$

$\log y . \log x = \log x . \log y$ η οποία είναι προφανής

ii)

Πρέπει να είναι $x > 0$ και $y > 0$

$$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{cases} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x^{\log y} = 20 \\ \log(xy)^{\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\log y} = 10 \\ \dfrac{1}{2}\log(xy) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x^{\log y} = \log 10 \\ \log(xy) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log y \log x = 1 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Θέτουμε $\log x = \alpha$ και $\log y = \beta$ $\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $\beta = 1$

$\log x = 1$ και $\log y = 1$

$x = 10$ και $y = 10$